Trabajo Práctico N° 5 Matemática 5to

Mail: alejandro.petrillo@gmail.com

Wtp: 11-40754757

Fecha de entrega: 20 de Noviembre

Hola. Bueno, como sabrán este es el ultimo tp que consta de hacer el final final de polinomios que tanto lo quieren y un poco de combinatoria que es el tema que estuvimos viendo ultimo. Al final final, les dejo una sorpresa, de fin de año. Con la cual me van a querer un poco de lo que me quieren ahora.

Final de polinomios

Para cerrar bien con el tema de polinomios en el anterior trabajo nos basamos en como factorizarlo, tuvimos un montón de técnicas, herramientas y funcionamientos para poder factorizarlo o escribirlo de otra manera.

Nuestra idea, es escribir un polinomio que tengamos como multiplicación de raíces, entonces todas las técnicas que hemos visto anteriormente nos van a servir para poder realizar esto. Claramente, releer el anterior trabajo para ver definición de raíces o casos de factoreo, sumado a ruffini que está en el trabajo 3.

Entonces, la idea de esto es que ustedes a partir de las herramientas ya vistas, puedan factorizarlo y escribir el polinomio como multiplicación de raíces.

Recordemos las herramientas que tenemos hasta ahora y para qué sirven.

. Regla de Ruffini: Sirve para dividir polinomios de algún grado con otro de grado 1.

. Teorema de Gauss: Nos ayuda a ver las posibles raíces de un polinomio.

. **Regla de Descartes:** Nos permite ver la a cantidad de raíces positivas o negativas de un polinomio.

. Factor común: Nos permite absorber las X de más para poder seguir factorizando el polinomio.

. Bashkara o resolvente: Para polinomios de grado 2, nos permite encontrar de una manera rápida las 2 raíces.

. Tanteo: Sin un método claro, remplazando y "tanteando" podemos ver cuando ese polinomio tiene una raíz.

Veamos 2 ejemplos, en el cual utilizamos estas técnicas para resolverlo.

Factorizar el siguiente polinomio:

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

Lo primero que tenemos que buscar es alguna raíz, para poder simplicar ese polinomio. Recuerden que la raíz cumple que $P(x) = 0$.

. Podrían ver por Gauss y descartes cuales son las posibles raíces de ese polinomio. Pero si por tanteo o por casualidad ven alguna raíz. Claramente es válido. Lo que tiene gauss y descartes es que van a achicar el panorama de posibilidades cuando no tenemos ninguna posible raíz. Veamos usando gauss.

Tomamos los divisores del término independiente: {**±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12**}, y los dividimos por los divisores del coeficiente principal, que al ser 1, me da como posibles raíces. Todas las anteriores opciones, si, son muchas, pero son muchas menos que tener infinitos números.

Veamos $P(1)$

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \\
P(1) &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 12 \\
P(1) &= 1 + 3 - 4 - 12 \\
P(1) &= -12
\end{aligned}$$

Y claramente no es raíz. Pero veamos con $P(2)$

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \\
P(2) &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 12 \\
P(2) &= 8 + 3 \cdot 4 - 8 - 12 \\
P(2) &= 0
\end{aligned}$$

Ahora sí, sabemos que es raíz, entonces. Como 2 es raíz, sabemos que divide al polinomio. Entonces como lo divide y el resto es 0 (por teorema del resto), podremos dividirlo con ruffini y escribirlo de otra manera. Dividiremos el polinomio que tenemos por $(x-2)$, porque 2 es raíz.

Entonces calculemos $\left(x^3 + 3x^2 - 4x - 12\right) : (x-2) =$

Y aplicando ruffini, nos queda:

(x-2)	1	3	-4	-12
2		2	10	-12
	1	5	6	0

El nuevo polinomio con un grado menos, nos quedaría como:

$$P(x) = (x-2)\left(x^2+5x+6\right)$$

Donde el x-2 es la raíz que acabo de extraer y la otra parte es el resultado de dividirla (que sale del ruffini, donde esta rosa y que dan 1 5 6).

Ahora ese polinomio de grado 2 lo puedo resolver con bashkara. Calculemos y nos va a dar las 2 nuevas raíces para poder seguir escribiendo.

$$x^2+5x+6$$
$$resolviendo$$
$$x_1 = -2 \quad y \quad x_2 = -3$$

Entonces $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$

Escribí el polinomio como producto de las 2 raíces.

Ahora veamos cómo queda el polinomio completo

$$P(x) = (x-2)(x+2)(x+3)$$

Y ahí termina el ejercicio.

Por si no se entendió, les dejo un videíto re piola con más ejemplos.

https://www.youtube.com/watch?v=3VNl3hWdI0U

Parte 2: Combinatoria

La combinatoria es la rama de la matemática que estudia las diversas formas de agrupar elementos de un conjunto. Nosotros veremos justamente eso, como agrupar elementos dependiendo de su orden y/o repetición, a partir de unas formulas. Pero antes deberemos detallar dos operaciones nuevas. Una es el factorial y la otra el número combinatorio. Explicadas a continuación.

<u>Factorial de un número:</u>

Es el producto de todos los números naturales anteriores o iguales a él. Y se nota con el signo de exclamación !.

Notación:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

En ese caso estaríamos calculando el producto de todos los números anteriores a n hasta llegar al 1.

Propiedades del factorial a tener en cuenta:

. $1! = 1$

. $0! = 1$

Ejemplo:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

<u>Número combinatorio</u>

El número combinatorio es una escritura que funciona para establecer agrupaciones en las que no importa el orden y los elementos no se repiten. Y crea una cantidad R de grupos de un conjunto de N elementos. Es decir, si un conjunto tiene 10 elementos y quiero ver cuántos grupos de 3 puedo armar utilizo el número combinatorio.

Notación:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Propiedades del número combinatorio:

. $\binom{n}{0} = 1$. $\binom{n}{n} = 1$. $\binom{n}{1} = n$

Ejemplo:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$$

Luego de haber visto que es el factorial y el número combinatorio pasaremos a ver los distintos casos que se nos pueden presentar a la hora de resolver los ejercicios. Los casos son 6, estos van a depender del orden y la repetición. Los vamos a detallar al siguiente con un ejemplo para cada uno y su formula correspondiente.

Analicemos primero los casos SIN REPETICION, es decir, donde ningún elemento del conjunto se repite.

<u>Permutaciones sin repetición:</u>

Las permutaciones sin repetición son posibles ordenaciones de un conjunto de N elementos distintos sin que alguno de ellos se repita.

Se calculan haciendo el factorial de la cantidad de elementos del conjunto. Es decir, para saber las posibles ordenaciones de un conjunto con N elementos, hacemos:

$P_{SR} = n!$ Donde n son la cantidad de elementos del conjunto.

Donde P_{SR} son permutaciones sin repetición.

Ejemplo:

¿Cuántos números de 5 cifras distintos pueden escribirse con los números 2, 3, 5, 8 y 9?

Es primordial notar que es SIN REPETICION es decir, que ninguno de los elementos del conjunto se repite. Y necesito saber la cantidad de posibles ordenaciones del mismo. Entonces, es una PERMUTACION SIN REPETICION y como la cantidad de elementos a tomar del conjunto es 5, entonces:

$$P_{SR} = n! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Donde P_{SR} son permutaciones sin repetición

Entonces, existen 120 números distintos de 5 cifras que puedo armar con esos números.

<u>Combinaciones sin repetición:</u>

Las combinaciones sin repetición son posibles muestras sin orden de un conjunto de R elementos distintos que se pueden extraer de un conjunto de N elementos.

Noten que la clave en este es ver que es SIN REPETICIÓN y que NO IMPORTA EL ORDEN. A tener en cuenta esas dos cosas a la hora de resolver los problemas.

¿Cómo lo calculo?

A partir del número combinatorio, es decir, necesito tomar R elementos sin orden de un conjunto de N elementos entonces:

$$C_{SR} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Donde C_{SR} son combinaciones sin repetición

Ejemplo:

En un curso de 17 alumnos necesito formar grupos de 4 personas. ¿Cuántos grupos puedo formar en total?

Notemos que los alumnos no se repiten entonces es SIN REPETICION y la verdad que el orden no me interesa porque me da igual si Pedrito esta primero segundo o tercero en el grupo, entonces es SIN ORDEN. Tengo 17 elementos y los tengo que tomar de a 4 y hago la formula.

$$C_{SR} = \binom{17}{4} = \frac{17!}{4!(17-4)!} = \frac{17!}{4!13!} = 2380$$

<u>Variaciones sin repetición:</u>

Las variaciones sin repetición son posibles muestras ordenadas de R elementos distintos que se pueden extraer de un conjunto de N elementos. Notemos que es SIN REPETICION Y CON ORDEN. La diferencia es sutil, pero es la clave del ejercicio. Poder ver que estas variaciones me interesa el orden.

¿Cómo lo calculo?

Va a ser muy similar las combinaciones pero sin eliminar los casos que antes se repetían, porque ahora si me interesa quien queda en primer segundo o tercer lugar. Entonces calculamos:

$V_{SR} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ Donde N es el total de elementos del conjunto y R son los elementos a tomar.

V_{SR} son las variaciones sin repetición

Ejemplo:

En una carrera con 10 atletas ¿De cuantas formas podrían repartirse las medallas de oro, plata y bronce?

Primero veamos que son 10 atletas y yo necesito 3 para los podios. Es decir, de 10 tomo grupos de 3, hasta ahora vamos bien. Pero, veamos que no puedo repetir y que el orden me interesa porque creeríamos que no les da igual salir primero, segundo o tercero. Entonces es SIN REPETICION Y CON ORDEN.

$$V_{SR} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 720$$

Hasta ahora vimos los 3 casos SIN REPETICION. A continuación veamos los próximos 3 que si utilizan la repetición como característica.

<u>Permutaciones con repetición:</u>

La idea la permutación es agrupar ahora elementos de un conjunto de N elementos. Similar al anterior con la diferencia de que podemos repetir elementos de este conjunto.

¿Cómo lo calculo?

La fórmula para este, va a ser similar, pero vamos a eliminar (dividiendo) los casos que se van a repetir.

Entonces la formula sería $P_{CR} = \dfrac{n!}{\alpha!\cdot\beta!\cdot\delta!\ldots}$

Donde N son la cantidad de elementos y $\alpha, \beta, \delta \ldots$ son la cantidad de veces que puedo tener ciertos elementos repetidos. Los puntos suspensivos van porque no sé cuantos elementos de un conjunto puedo llegar a repetir.

P_{CR} Serian permutaciones con repetición.

Ejemplo:

¿Cuántos números distintos de 7 cifras se pueden escribir usando los siguientes números 7, 7, 7, 4, 4 ,1 ,8?

Veamos que el total tenemos 7 elementos en el conjunto, es decir que N es 7. Ahora veamos a cantidad de veces que se repiten esos elementos. El 7 se repite 3 veces, el 4 se repite 2 veces, el 1 una vez y el 8 otra vez. Es decir que, los números de repeticiones van a ser 3, 2, 1 y 1. Veamos cómo queda en la formula.

$$P_{CR} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \delta! \ldots} = \frac{7!}{3!2!1!1!} = \frac{7!}{6 \cdot 2} = 420$$

Existen 420 números que cumplen esa condición.

<u>Combinaciones con repetición:</u>

Las combinaciones con repetición son posibles muestras no ordenadas de R elementos no necesariamente distintos que puedo extraer de un conjunto de N elementos. Es decir, extraigo elementos de un conjunto en cual pueden ser REPETIDOS y donde NO ME INTERESA EL ORDEN.

¿Cómo lo calculo?

Lo vamos a calcular a partir de la siguiente formula

$$C_{CR} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n+r-1-r)!} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

Donde C_{CR} son las combinaciones con repetición y N son los elementos del conjunto, R son los elementos que tomo.

Ejemplo

Un banco ofrece un regalo a elegir entre 5 posibles regalos por cada caja de ahorro. Un señor que tiene tres cajas de ahorro en dicho banco ¿De cuántas formas puede elegir el lote de tres obsequios si no le importa repetir regalos?

Notemos que en este tengo 5 elementos en el conjunto y necesito tomar de a 3. Con repetición y sin orden. Entonces N es 5 y R es 3. Veamos:

$$C_{CR} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

<u>Variaciones con repetición:</u>

Muestras ordenadas de R elementos no necesariamente distintos que se pueden extraer de un conjunto de N elementos. Veamos que no solo es con repetición si no que al ser variaciones ME INTERESA EL ORDEN.

¿Cómo lo calculo?

Sabiendo que N es el total de elementos del conjunto y R es el conjunto a extraer. Entonces:

$$V_{CR} = n \cdot n \cdot n \cdot n ... = n^r$$

Ejemplo:

¿Cuántos números de 6 cifras puedo escribir con los números 6, 4, 3 y 8?

Notemos que cuentan todos los casos, así que el orden me interesa y aparte puedo repetir los números como yo quiera. Este es un poco más difícil de observar, notemos que 4 es la cantidad de elementos de mi conjunto, porque los elementos son 6, 4, 3 y 8. Entonces N es 4, pero los puedo poner en 6 posiciones diferentes, porque el número es de 6 cifras, entonces R es 6. Veamos:

$$V_{CR} = n \cdot n \cdot n \cdot n ... = n^r = 4^6 = 4096$$

Trabajo Práctico N° 5 para entregar

1. Factorizar completamente los siguientes polinomios
   a) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
   b) $Q(x) = x^3 - x^2 - 6$
   c) $A(x) = x^3 - 11x^2 + 31x - 21$
   d) $B(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
   e) $C(x) = x^5 - 10x^4 + 9x$
2. Resolver los siguientes ejercicios
   a) $9! =$
   b) $\frac{10!}{6!} =$
   c) $\frac{16!}{6!10!} =$
   d) $\binom{16}{10} =$
   e) $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12! =$
3. Resolver los siguientes ejercicios usando combinatoria
   a) ¿De cuantas formas diferentes se pueden cubrir los puestos de presidente, vicepresidente y tesorero de un club de futbol sabiendo que hay 13 candidatos posibles?
   b) En una clase de 15 alumnos se van a distribuir 4 premios. Averiguar de cuantas formas pueden hacerse si: los premios son iguales y si los alumnos pueden ganar más de un premio.

c) ¿Cuántas palabras se pueden escribir con las letras de SOBRE? Sin repetir ninguna.
d) ¿De cuántas formas pueden mezclarse los siete colores del arco iris tomándolos de tres en tres?
e) ¿Cuántas palabras se pueden escribir con las letras de SOBRE? Repitiendo las letras.
f) ¿Cuántos números de 9 cifras puedo formar con cuatro 7, tres 2 y dos 1?

4. ¿Cuántos números de 4 dígitos puedo formar con los números del 1 al 9? Cumpliendo las siguientes normas:
    a) Permitiendo repeticiones
    b) Sin repeticiones
    c) Si el último digito es 1 y no permito repeticiones.
5. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse 6 personas?
    a) En una fila de 5 sillas
    b) En una fila de 6 sillas

Ejercicio fin de año.

Elegir un trabajo practico del año (el que quieran o más les guste o les haya llamado la atención) y realizar un escrito con sus propias palabras de aproximadamente una carilla. Puede ser un resumen, puede ser lo que hayan entendido de ese trabajo o lo que les haya quedado.

. Si o si, tiene que ser con sus palabras.

. Les dejo unas preguntas para guiarse a la hora de escribir. ¿De qué habla este trabajo? ¿Qué entiendo de esto? ¿Qué ejercicios me gustaron o no y porque? ¿Para que sirve ese tema? ¿Con que lo conectan a la hora de entenderlo? ¿Cómo se les complico y lo fueron entendiendo a partir de que ejercicio? Etc.

.